Prof. Dr. Alfred Toth

Ontische algebraische Kategorien

1. Daß man die algebraische Kategorietheorie zur mathematischen Darstellung der Semiotik verwenden kann, ist eine Idee, die von Max Bense selbst stammt (vgl. Bense 1981, S. 124 ff.). Das bislang umfassendste System einer kategorietheoretischen Semiotik findet sich in Toth (1997). Auch der Laie kennt MacLanes bekannte Aussage, daß in der Kategorientheorie mit "Pfeilen" gerechnet wird. Man kann somit Morphismen, Funktoren, natürliche Transformationen und verwandte Typen von Abbildungen statt entitätischer Zahlen oder Mengen zur Begründung der Mathematik und der Semiotik verwenden. Wegen der zuletzt in Toth (2015) umfassend dargestellten ontisch-semiotischen Isomorphie kann man nun auch, zunächst wenigstens in ihren elementarsten Grundzügen, eine ontische Kategorietheorie begründen.

2. Das vollständige semiotische Tripel-Universum

2.1. Randkonstante semiotische Tripel

2.1.1. Isomorph zu den ontotopologischen Grundstrukturen

$<3.3.3>_{S}$	$<3.2.3>_{S}$	$<3.2.3>_{R[S,U]}$	$<3.2.3>_{U}$	$<3.3.3>_{U}$
$<3.3.2>_{S[S]}$	$<3.2.2>_{S[S]}$	$<3.2.2>_{R[S,U]}$	$<3.2.2>_{U[S]}$	$<3.3.2>_{U}$
$<3.3.2>_{S[U]}$	$<3.2.2>_{S[U]}$	$<3.2.2>_{R[U,S]}$	$<3.2.2>_{U[U]}$	$<3.3.2>_{U}$
$<3.3.1>_{S}$	$<3.2.1>_{S}$	$<3.2.1>_{R[S,U]}$	$<3.2.1>_{U}$	$<3.3.1>_{U}$

2.1.2. Nicht-isomorph zu den ontotopologischen Grundstrukturen

$<3.1.1>_{S}$	$<3.1.1>_{S[S]}$	$<3.1.1>_{R[S,U]}$	$<3.1.1>_{U[S]}$	$<3.1.1>_{U}$
$<3.1.1>_{S}$	$<3.1.1>_{S[U]}$	$<3.1.1>_{R[U,S]}$	$<3.1.1>_{U[U]}$	$<3.1.1>_{U}$
$<3.1.2>_{S}$	$<3.1.2>_{S[S]}$	$<3.1.2>_{R[S,U]}$	$<3.1.2>_{U[S]}$	$<3.1.1>_{U}$
$<3.1.2>_{S}$	$<3.1.2>_{S[U]}$	$<3.1.2>_{R[U,S]}$	$<3.1.2>_{U[U]}$	$<3.1.1>_{U}$
$<3.1.3>_{S}$	$<3.1.3>_{S[S]}$	$<3.1.3>_{R[S,U]}$	$<3.1.3>_{U[S]}$	$<3.1.3>_{U}$

$<3.1.3>_{S}$	$<3.1.3>_{S[U]}$	$<3.1.3>_{R[U,S]}$	$<3.1.3>_{U[U]}$	$<3.1.3>_{U}$

2.2. Partiell randkonstante semiotische Tripel

2.2.1. Isomorph zu den ontotopologischen Grundstrukturen

$<2.3.3>_{S}$	$<2.2.3>_{S}$	$<2.2.3>_{R[S,U]}$	$<2.2.3>_{U}$	$<2.3.3>_{U}$
$<2.3.2>_{S[S]}$	$<2.2.2>_{S[S]}$	$<2.2.2>_{R[S,U]}$	$<2.2.2>_{U[S]}$	$<2.3.2>_{U}$
$<2.3.2>_{S[U]}$	$<2.2.2>_{S[U]}$	$<2.2.2>_{R[U,S]}$	$<2.2.2>_{U[U]}$	$<2.3.2>_{U}$
$<2.3.1>_{S}$	$<2.2.1>_{S}$	$<2.2.1>_{R[S,U]}$	$<2.2.1>_{U}$	$<2.3.1>_{U}$

2.2.2. Nicht-isomorph zu den ontotopologischen Grundstrukturen

$<2.1.1>_{S}$	$<2.1.1>_{S[S]}$	$<2.1.1>_{R[S,U]}$	$<2.1.1>_{U[S]}$	$<2.1.1>_{U}$
$<2.1.1>_{S}$	$<2.1.1>_{S[U]}$	$<2.1.1>_{R[U,S]}$	$<2.1.1>_{U[U]}$	$<2.1.1>_{U}$
$<2.1.2>_{S}$	$<2.1.2>_{S[S]}$	$<2.1.2>_{R[S,U]}$	$<2.1.2>_{U[S]}$	$<2.1.1>_{U}$
$<2.1.2>_{S}$	$<2.1.2>_{S[U]}$	$<2.1.2>_{R[U,S]}$	$<2.1.2>_{U[U]}$	$<2.1.1>_{U}$
$<2.1.3>_{S}$	$<2.1.3>_{S[S]}$	$<2.1.3>_{R[S,U]}$	$<2.1.3>_{U[S]}$	$<2.1.3>_{U}$
$<2.1.3>_{S}$	$<2.1.3>_{S[U]}$	$<2.1.3>_{R[U,S]}$	$<2.1.3>_{U[U]}$	$<2.1.3>_{U}$

2.3. Nicht-randkonstante semiotische Tripel

2.3.1. Isomorph zu den ontotopologischen Grundstrukturen

$<1.3.3>_{S}$	$<1.2.3>_{S}$	$<1.2.3>_{R[S,U]}$	$<1.2.3>_{U}$	$<1.3.3>_{U}$
$<1.3.2>_{S[S]}$	$<1.2.2>_{S[S]}$	$<1.2.2>_{R[S,U]}$	$<1.2.2>_{U[S]}$	$<1.3.2>_{U}$
$<1.3.2>_{S[U]}$	$<1.2.2>_{S[U]}$	$<1.2.2>_{R[U,S]}$	$<1.2.2>_{U[U]}$	$<1.3.2>_{U}$
$<1.3.1>_{S}$	$<1.2.1>_{S}$	$<1.2.1>_{R[S,U]}$	$<1.2.1>_{U}$	$<1.3.1>_{U}$

2.3.2. Nicht-isomorph zu den ontotopologischen Grundstrukturen

$<1.1.1>_{S}$	$<1.1.1>_{S[S]}$	$<1.1.1>_{R[S,U]}$	$<1.1.1>_{U[S]}$	$<1.1.1>_{U}$

$<1.1.1>_{S}$	$<1.1.1>_{S[U]}$	$<1.1.1>_{R[U,S]}$	$<1.1.1>_{U[U]}$	$<1.1.1>_{U}$
$<1.1.2>_{S}$	$<1.1.2>_{S[S]}$	$<1.1.2>_{R[S,U]}$	$<1.1.2>_{U[S]}$	$<1.1.1>_{U}$
$<1.1.2>_{S}$	$<1.1.2>_{S[U]}$	$<1.1.2>_{R[U,S]}$	$<1.1.2>_{U[U]}$	$<1.1.1>_{U}$
$<1.1.3>_{S}$	$<1.1.3>_{S[S]}$	$<1.1.3>_{R[S,U]}$	$<1.1.3>_{U[S]}$	$<1.1.3>_{U}$
$<1.1.3>_{S}$	$<1.1.3>_{S[U]}$	$<1.1.3>_{R[U,S]}$	$<1.1.3>_{U[U]}$	$<1.1.3>_{U}$

3. Selbstverständlich sind die in Kap. 2 gegebenen, mit den ontischen Grundstrukturen nicht-isomorphen semiotischen Tripel-Relationen ebenfalls ontisch-semiotisch isomorph. Wie diese ontischen Strukturen aussehen, muß einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben, denn uns interessiert hier zunächst lediglich die Substitution entitätischer Tripel durch Relationen aus Morphismen.

3.1. Zunächst definieren wir

α: $(1 \rightarrow 2)$,

β: $(2 \rightarrow 3)$,

daraus folgt

$\alpha°$: $(2 \rightarrow 1)$,

$\beta°$: $(3 \rightarrow 2)$,

so daß wir die komponierten Morphismen

$\beta\alpha$: $(1 \rightarrow 3)$

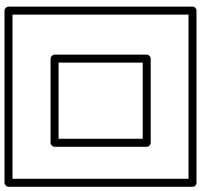
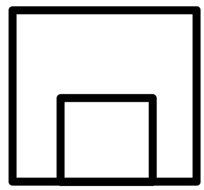
$\alpha°\beta°$: $(3 \rightarrow 1)$

haben.

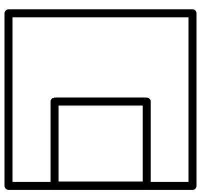
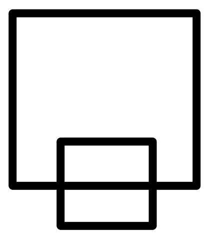
Mit Hilfe von α und β können also die Übergänge für jedes Paar von Tripel-Relationen

t: $S_1 = <x_1.y_1.z_1> \rightarrow S_2 = <x_2.y_2.z_2>$

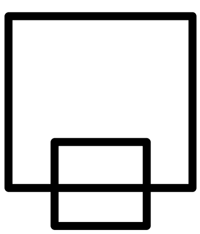
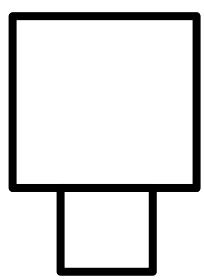
für alle x_i, y_j und z_k mit $i, j, k \in \mathbb{N}$ bestimmt werden. Z.B. werden die folgenden Übergänge der vollständigen 4er-Reihe von teilsystemabgeschlossener Randkonstanz wie folgt bestimmt.

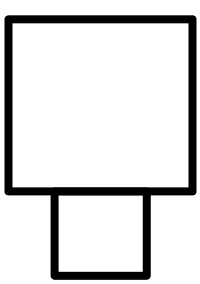
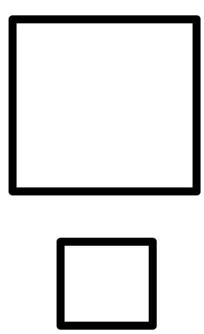
t_1: $<3.3.3>_S \quad \rightarrow \quad <3.2.3>_S \quad = <id_3, \beta°, id_3>_S$

t_2: $<3.2.3>_S \quad \rightarrow \quad <3.2.3>_{R[S,U]} \quad = <id_3, id_2, id_3>_{S \rightarrow R[S,U]}$

t_3: $<3.2.3>_{R[S,U]} \quad \rightarrow \quad <3.2.3>_U \quad = <id_3, id_2, id_3>_{R[S,U] \rightarrow U}$

t_4: $<3.2.3>_U \quad \rightarrow \quad <3.3.3>_U \quad = <id_3, \alpha, id_3>_U$

Literatur

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Toth, Alfred, Entwurf einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Ontische Isomorphie und Nicht-Isomorphie semiotischer Tripel-Relationen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2015

15.2.2015